L1 Eco - Analyse 2

Cours d'optimisation

T. DUMONT, C. LÉONARD, X. MARY, H. MOHAMED

Contents

*Université Paris Ouest - Nanterre - La Défense

1. Semaine 1 : Géométrie

1.1. Points et vecteurs de $\mathbb{R}^2$

1.1.1. Première définition

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \;\; y \in \mathbb{R}\}$$

Exemple $P = (2, 3)$ est un point de $\mathbb{R}^2$.

- l'ensemble de points $\mathbb{R}^2$ est un espace affine avec comme origine $\mathbb{O} = (0, 0)$.
- Exemple $P = (2, 3)$ est un point de $\mathbb{R}^2$.
- Pour chaque paire de points (P, Q) de $\mathbb{R}^2$, $(P = (x_P, y_P)\ Q = (x_Q, y_Q))$ on peut définir le vecteur $\overrightarrow{PQ} = (x_Q - x_P, y_Q - y_P)$ (exemple)
- Si $Q = P$, $\overline{PP}$ est le vecteur nul $\vec{0} = (0, 0)$.
- Attention : points et vecteurs sont définis par des coordonnées (x, y) cependant, durant ce cours nous ferons la distinction entre les deux! (exemples graphiques)

1.1.2. Opérations sur les points et les vecteurs

- Combinaison linéaire de vecteurs. Soient $n \in \mathbb{N}$, $\vec{u}_1 = (x_1, y_1), \ldots, \vec{u}_n = (x_n, y_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires ($\lambda_i \in \mathbb{R}$). Alors $\lambda_1 * \vec{u}_1 + \lambda_2 * \vec{u}_2 + \ldots + \lambda_n * \vec{u}_n$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n, \lambda_1 y_1 + \ldots + \lambda_n y_n)$. Exemples.

- Addition d'un point et d'un vecteur. Si $P = (x_P, y_P)$ et $\vec{u} = (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$, $Q = P + \vec{u}$ est un POINT de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées $(x_P + x_{\vec{u}}, y_P + y_{\vec{u}})$. Exemples.
- Addition de POINTS ensemble possible mais on s'interdira de le faire.

1.2. Vecteurs : Norme et Produit scalaire

1.2.1. La norme

- Théorème de Pythagore (+démonstration).
- Définition : Norme (longueur) d'un vecteur.

Propriété 1.1. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$*

1. *$\vec{u} = \vec{0}$ si et seulement si $||\vec{u}|| = 0$.*
2. *$||\lambda\vec{u}|| = |\lambda| \cdot ||\vec{u}||$.*
3. *Inégalité triangulaire. $||\vec{u} + \vec{v}|| \leq ||u|| + ||v||$ (sans preuve)*

- Définition : vecteurs colinéaires. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ vecteurs de $\mathbb{R}^2$ avec $\vec{v} \neq \vec{0}$. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. (Remarque: $\vec{u}$ peut être le vecteur nul.)

Propriété 1.2. *Soient $\vec{u}, \vec{v}$ vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$*

1. *Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.*
2. *Si* $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ *avec* $\lambda \geq 0$, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires dans le même sens et (cas dégalité de l'inégalité triangulaire)* $||\vec{u} + \vec{v}|| = ||\vec{u}|| + ||\vec{v}||$
3. *Si* $\vec{u} = \lambda\vec{v}$ *avec* $\lambda \leq 0$, $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires de sens opposé et* $||\vec{u} + \vec{v}|| = |\ ||\vec{u}|| - ||\vec{v}||\ |$.

1.2.2. Le produit scalaire

- Dans $\mathbb{R}$ le produit scalaire de deux réels u et v est le produit classique $u \cdot v$. Il apparait dans l'identité remarquable: $(u + v)^2 = u^2 + v^2 + 2u \cdot v$
- De la même manière on cherche á définir un produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ á partir de l'identité $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$. Comment définir le produit $\vec{u} \cdot \vec{v}$ pour qu'une telle identité s'applique?

Definition 1.1. *Soient* $\vec{u}, \vec{v}$ *vecteurs de* $\mathbb{R}^2$ $(\vec{u} = (x_{\vec{u}}, y_{\vec{u}})$ *et* $\vec{v} = (x_{\vec{v}}, y_{\vec{v}})$ *). On défini le produit scalaire* $\vec{u} \cdot \vec{v}$ *par*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}}\ .$$

Propriété 1.3. *Soient* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ *vecteurs de* $\mathbb{R}^2$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $||\vec{u}||^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$
2. *(symétrie)* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
3. *(bilinéairité)* $\vec{u} \cdot (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \cdot \vec{v} + \beta\vec{u} \cdot \vec{w}$

Proposition 1.2 (Orthogonalité et réciproque de Pythagore)**.** *Soient* $\vec{u}, \vec{v}$ *vecteurs de* $\mathbb{R}^2$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

De plus

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

- Application : équation de la tangente pour les graphs de fonctions d'une variable.

1.3. Domaines de $\mathbb{R}^2$

- Domaines définis par une équation - Cas particulier graphe d'une fonction - Les cercles. (exemples)
- Domaines définis par une inéquation (exemples)
- Domaines définis comme intersection ou réunion d'autres domaines.
- Complémentaire d'un domaine.

2. Semaine 2 : Fonctions de 2 variables relles

2.1. Fonctions 2 variables relles

- Fonction réelle de deux variables réelles $f : (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$.
- Domaine de définition $\mathcal{D}_f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \text{ "est bien défini"}\right\}$. - Exemples : Donner et représenter les domaines de définition ($\mathcal{D}_f$) des fonctions suivantes

- $f(x, y) = \frac{x}{y}$
- $f(x, y) = \ln(x + y)$
- $f(x, y) = \ln(xy)$

- Représentation 3D (cf. pdf)
- Courbes de niveau : La courbe de niveau α d'une fonction f est défini par l'ensemble des points (x, y) appartenant à l'ensemble de définition de f ($\mathcal{D}_f$) vérifiant $f(x, y) = \alpha$. On la note $\mathcal{C}_\alpha$.

$$\mathcal{C}_\alpha = \{(x, y) \in \mathcal{D}_f \mid f(x, y) = \alpha\} \ .$$

Exemples : Dessiner les courbes de niveau C_α pour les fonctions et niveaux suivants :

- $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$, niveaux $\alpha = -1$ et $\alpha = 2$
- $f(x, y) = xy$, niveau $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$
- $f(x, y) = x \ln(xy)$, niveau $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$

- Ensembles de niveaux : exemples
  - Continuité d'une fonction de deux variables :

Definition 2.1. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$.*

- *f est continue en (x_0, y_0) si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| = 0$$

  c'est à dire, si quelque soit $\epsilon > 0$ aussi petit qu'on veut, il existe un rayon $r > 0$ tel que : si un point (x, y) de $\mathcal{D}_f$ est dans le disque de rayon r et de centre (x_0, y_0) alors $f(x_0, y_0) - \epsilon < f(x, y) < f(x_0, y_0) + \epsilon$.
- *f est continue sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_f$ si f continue en tout point de $\mathcal{D}$.*

2.2. Dérivées partielles et vecteur gradient

- Fonctions partielles :

  Definition 2.2. *Soit f une fonction de deux variables définie sur un domaine $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2$. Soit (x_0, y_0) un point de $\mathcal{D}_f$. On peut définir deux fonctions d'une variable, appeles fonctions partielles obtenues en "fixant" l'une des deux variables:*

$$f_x : x \mapsto f(x, y_0)$$
$$f_y : y \mapsto f(x_0, y)$$

f_x et f_y sont donc des fonctions d'UNE variable définies respectivement sur $\mathcal{D}_x = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in \mathcal{D}_f\}$ et $\mathcal{D}_y = \{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in \mathcal{D}_f\}$.

Exemples : donner les fonctions partielles :
- $f(x, y) = xy^3$ en $(x_0, y_0) = (2, 3)$
- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ en $(x_0, y_0) = (1/2, 1)$

- Dérivées partielles

Definition 2.3. – *La dérivée partielle de la fonction f par rapport à x en (x_0, y_0) est la dérivée de la fonction partielle :*

$$x \mapsto f(x, y_0) \ , \ \text{en } x_0 \ .$$

Elle est notée $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ (comprendre "Dérivée de f par rapport à x en (x_0, y_0)").
$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$ existe si la fonction partielle

$$x \mapsto f(x, y_0)$$

est dérivable en x_0.

– *La dérivée partielle de la fonction f par rapport à y en (x_0, y_0) est la dérivée de la fonction partielle :*

$$y \mapsto f(x_0, y) \ , \text{en } y_0 \ .$$

Elle est notée $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ ou$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ (comprendre "Dérivée de f par rapport à y en (x_0, y_0)"). $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ existe si la fonction partielle

$$y \mapsto f(x_0, y)$$

est dérivable en y_0.

- Exemples : Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ des fonctions et pour les points suivants :

$$\begin{array}{ll}
f(x, y) = x(y - 1) & (x_0, y_0) = (0, 0) \\
f(x, y) = x \exp(xy) & (x_0, y_0) = (1, 0) \\
f(x, y) = \ln\left(\dfrac{x}{y}\right) & (x_0, y_0) = (1, 1) \\
f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} & (x_0, y_0) = (0, 0)
\end{array}$$

- Vecteur gradient

Definition 2.4. *soit f une fonction de 2 variables dont les dérivées partielles existent en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On appelle gradient de f en (x_0, y_0) le vecteur de $\mathbb{R}^2$ formé par les dérivées partielles :*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0), \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right)$$

- **Remarque importante** : Si f possède des dérivés partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en tout point d'un domaine $\mathcal{D}$ alors les fonctions définies sur $\mathcal{D}$: $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont elles mêmes des fonctions de deux variables des dérivées partielles sont des fonctions de deux variables.

2.3. Dérivées partielles du second ordre

Definition 2.5. *Si f possède des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ et si ces deux fonctions possèdent des dérivées partielles on dit que f possède des dérivées partielles du second ordre. On note alors :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Theorem 2.6 (Théorème de Schwarz)**.** *Si f possède des dérivées partielles du second ordre au voisinage de (x_0, y_0) et si les dérivées partielles secondes croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues en (x_0, y_0) alors elles sont égales.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

- Exemple : Calculer les dérivées partielles du second ordre des fonctions suivantes. Illustrez le Théorème de Schwarz.
  - $f(x, y) = x(y - 1)$
  - $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

3. Semaine 3 : Développement de Taylor

Definition 3.1. *Soit $f : \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ et soit $k \geq 0$ un entier positif. On dit que f est négligeable devant $||(x - x_0, y - y_0)||^k$*

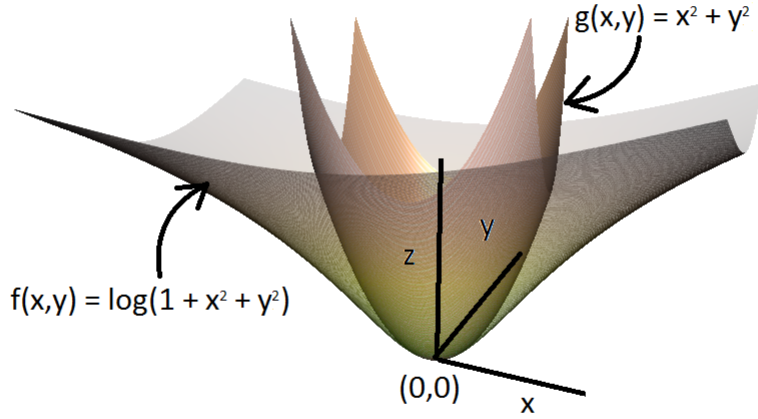


Figure 1: DL de $\log(1+x^2+y^2)$

au voisinage de (x_0, y_0) *si*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{||(x-x_0, y-y_0)||^k} = 0 \ .$$

Dans ce cas on peut mettre la fonction f *sous la forme:*

$$f(x,y) = ||(x-x_0, y-y_0)||^k \epsilon(x,y) \ ,$$

Avec $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon(x,y) = 0$

Theorem 3.2 (Développement limité de Taylor-Young du second ordre)**.** *Soit* f *une fonction de deux variables définie au voisinage de* (x_0, y_0)*. On suppose que* f *admet des derivées partielles secondes et que celles ci sont continues au voisinage de* (x_0, y_0)*. Alors* f *admet un développement limité à l'ordre deux en* (x_0, y_0) *:*

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right] \\
&\qquad + ||(x-x_0, y-y_0)||^2 \epsilon(x,y)
\end{aligned}$$

avec $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \epsilon(x,y) = 0$.

Exemple : Calculer le Développement l'ordre 2 en (0,0) de la fonction $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$ (voir figure 1)

Exemple : Ecrire le DL d'ordre 2 en $(0,0)$ puis en $(1,1)$ des fonctions suivantes :

- $f(x,y) = x^2 + y^2$
- $f(x,y) = xy$
- $f(x,y) = \exp(x+y)$

Remarque 3.1. -

1. *la plupart des fonctions qu'on rencontrera admetteront un développement limité.*
2. *On peut réecrire la formule de Taylor Young à l'aide du gradient introduit dans la section précédente :*

$$\begin{aligned} f(x_0+u, y_0+v) = f(x_0,y_0) &+ \nabla f(x_0,y_0)\cdot(u,v) \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)v^2\right] \\ &+ (u^2+v^2)\epsilon(u,v) \end{aligned}$$

avec $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \epsilon(u,v) = 0$.
3. *Du développement d'ordre 2 on peut déduire le développement du premier ordre :*

$$f(x_0+u, y_0+v) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(u,v) + \sqrt{(u^2+v^2)}\epsilon(u,v)$$

avec $\lim_{(u,v)\to(0,0)} \epsilon(u,v) = 0$.

D'après la remarque 3.1.3, lorsque le vecteur de déplacement (u,v) est très petit (c.f. figure 2)

$$f(x_0+u, y_0+v) \approx f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(u,v)$$

Le gradient indique donc la direction de variation maximale de la fonction au voisinage de (x_0,y_0) :

$$\nabla f(x_0,y_0)\cdot(u,v) = ||\nabla f(x_0,y_0)|| \cdot ||(u,v)|| \cos(\theta)$$

Ainsi la variation sera d'autant plus forte que $|\cos(\theta)|$ sera grand, c'est-à-dire quand la direction du déplacement sera proche de celle du gradient. à l'inverse si $\nabla f(x_0,y_0)\cdot(u,v) = 0$ alors la variation est minimale : le gradient est orthogonal aux lignes de niveaux de la fonction. La figure 3 illustre ce rsultat sur une carte topographique. Pour se rendre au sommet d'une montagne partant de son flan il suffit de se déplacer perpendiculairement aux lignes de niveaux, c'est á dire : suivre les gradients.

Exemple

- $f(x,y) = (x^2+y^2)$ tracer plusieurs lignes de niveaux de f ainsi que le gradient de f pour certains points
- faire de mme avec la fonction $f(x,y) = -(x^2+y^2)$

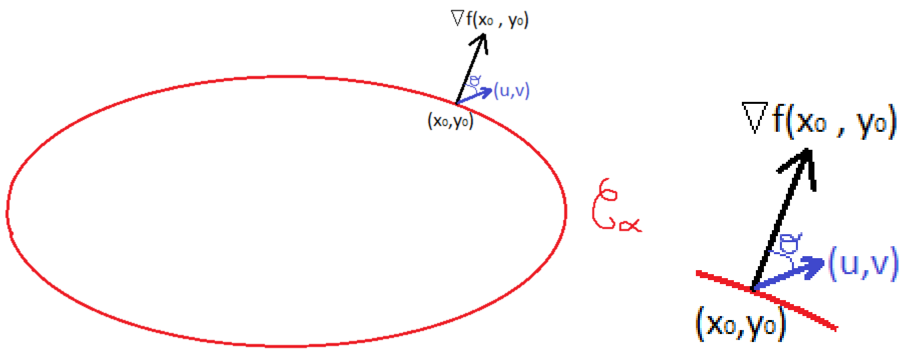
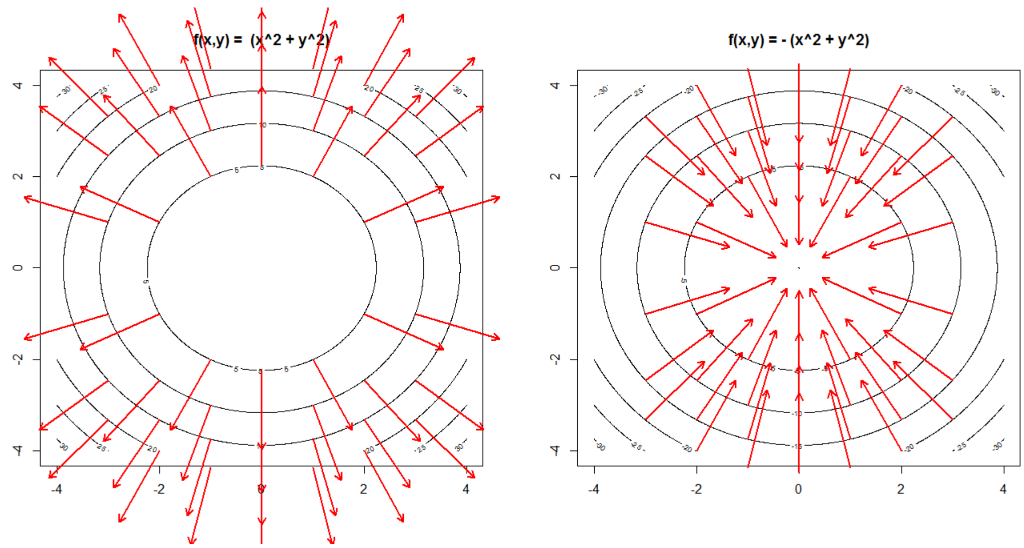


Figure 2: Gradient et ligne de niveaux

Figure 3: illustration : carte Topographique



(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ (b) $f(x, y) = -x^2 + y^2$

4. Semaine 4 : Optimisation de fonctions d'une variable réelle

4.1. Vocabulaire

l'optimisation libre contraste avec l'optimisation sous contraintes que nous verrons dans la suite du cours.

Definition 4.1. *soit $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ une fonction d'une variable et $x_0 \in \mathcal{D}_f$.*

- *x_0 est un point de maximum (resp. minimum) global pour f si pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $x \in \mathcal{D}_f$ $f(x) \geq f(x_0)$). $f(x_0)$ est alors le maximum (resp. minimum) global de f.*
- *x_0 est un point de maximum (resp. minimum) local pour f s'il existe **un voisinage** V de x_0 ($x_0 \in V \subset \mathcal{D}_f$) tel que x_0 soit un maximum (resp. minimum) global de la fonction f restreinte au domaine V.*
- *un extremum est un minimum ou un maximum.*

Remarque 4.1. *Comme voisinage V de x_0, on peut considérer l'intervalle $V =]x_0 - r, x_0 + r[$ avec r aussi petit que l'on veut.*

Definition 4.2. *Si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et si x_0 est à l'intérieur du domaine $\mathcal{D}_f$ (pas sur le bord). x_0 est appelé point stationnaire si $f'(x_0) = 0$.*

Proposition 4.3. *Si f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, si x_0 est un extremum local situé l'intérieur du domaine $\mathcal{D}_f$ et si f' continue au voisinage de x_0, alors x_0 est un point stationnaire.*

Proof. Supposons x_0 point de maximum local (preuve similaire si x_0 point de minimum local) : $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ pour tout h assez petit. Développement de Taylor de f à l'ordre 1 en x_0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h\epsilon(h) ,$$

où $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$. Donc pour h petit

- si $h > 0$, $f'(x_0) + \epsilon(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$ et, en prenant la limite en 0^+, $f'(x_0) \leq 0$
- si $h < 0$, $f'(x_0) + \epsilon(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$ et, en prenant la limite en 0^-, $f'(x_0) \geq 0$

finalement $f'(x_0) = 0$

□

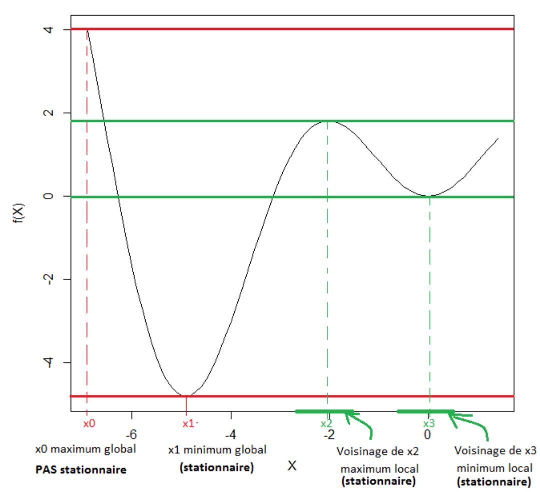


Figure 4: Illustration maximum minimum

Exemple : Trouver l'ensemble des points stationnaires et extremum globaux et locaux des fonctions suivantes (faire les tableaux de variation).

1. $f(x) = x + 5\sqrt{-5x - 1} + 1$
2. $f(x) = x^3(x^2 - 1)$
3. $f(x) = |x|$
4. $f(x) = \log(x)$ que l'on défini uniquement sur $[1, +\infty[$
5. $f(x) = x^2$

6. $f(x) = -x^2$

4.2. Application à l'optimisation sous contrainte d'une fonction de deux variable : Méthode de substitution

Considérons une fonction de deux variables $f(x, y)$. On souhaite trouver les extremums de f sous la contrainte $y = g(x)$. exemple : Maximiser $f(x, y)$ sous la contrainte $y = g(x)$, c'est à dire, trouver

$$\max\{f(x,y) \mid (x,y) \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = g(x)\} \ .$$

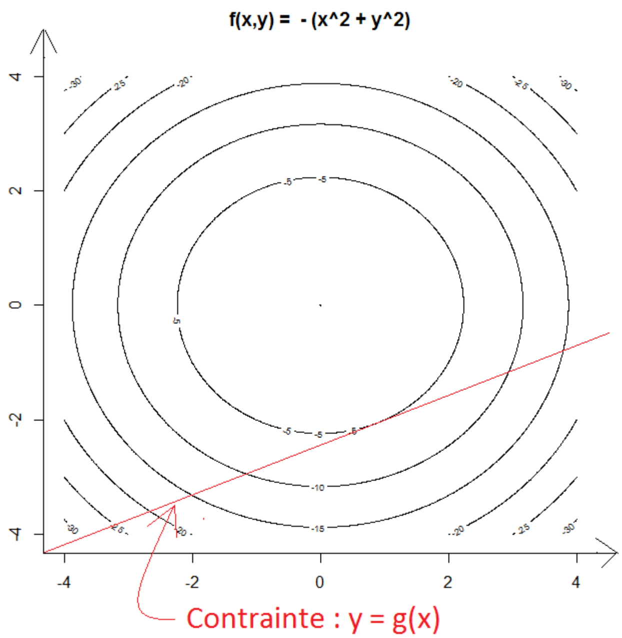


Figure 5: Optimisation sous contrainte

La méthode de substitution consiste simplement à trouver les extremums de la fonction d'une variable : $\widetilde{f}(x) = f(x, g(x))$.

Exemple: Optimiser sous les contraintes indiquées les fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 + y^2$, sous la contrainte : $x + y = 1$
2. $f(x, y) = xy$, sous la contrainte : $x - y = 1$

4.3. Convexité et caractrisation des extremums

Definition 4.4 (Convexité)**.** *Si f est deux fois dérivable sur son domaine de définition $\mathcal{D}_f$.*

- *On dit que f est convexe (resp. concave) si $f'' \geq 0$ (resp.$f'' \leq 0$).*
- *On dit que f est localement convexe (resp. localement concave) autour d'un point x_0 situé l'intérieur de $\mathcal{D}_f$ s'il existe un voisinage V de x_0 tel que $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$) pour tout $x \in V$.*

Remarque 4.2. *Si $f'' > 0$ on dit que f est strictement convexe.*

Proposition 4.5. *f est convexe (resp. concave) sur un intervalle I ssi $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$ (resp. $f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y)$) pour tout $x, y \in I$ et tout $t \in [0, 1]$.*

Remarque 4.3. *Cette caractérisation de la convexité est généralement prise comme définition.*

Exemple : Reprendre les fonctions de la partie 4.1 et discuter leur convexité.

Proposition 4.6. *1. f convexe ssi $-f$ concave.*
2. Une somme de fonctions convexes est convexe.
3. Un produit de fonctions convexes n'est en général ***pas*** *convexe.(contre exemple $x^3 = x \cdot x^2$)*

Proposition 4.7. *Soit f une fonction deux fois dérivable telle que f'' soit continue. Soit x_0 un point stationnaire de f :*

1. *si $f''(x_0) > 0$ alors x_0 point de minimum local.*
2. *si $f''(x_0) < 0$ alors x_0 point de maximum local.*
3. *si $f''(x_0) = 0$ alors on ne peut pas conclure.*

Proof. Prouvons le résultat 1.
x_0 un point stationnaire de f donc $f'(x_0) = 0$. Développement de Taylor à l'ordre 2 de f en x_0 :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)h^2 + h^2 \epsilon(h) ,$$

avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$. Donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h^2} = \frac{1}{2} f''(x_0) > 0$$

or h^2 positif donc $f(x_0 + h) - f(x_0) > 0$ pour tout h assez petit et x_0 point de minimum global.

Pour le point 3. : considérons les trois fonctions $f_1(x) = x^4$, $f_1(x) = -x^4$, $f_1(x) = x^3$. Pour ces 3 fonctions $x_0 = 0$ est un point stationnaire et $f_1''(0) = f_2''(0) = f_3''(0) = 0$ (condition du point 3.) or 0 est un point de maximum local pour f_1, de minimum local pour f_2 et n'est pas un extremum local pour f_3. □

Proposition 4.8. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I. Si f est convexe (resp. concave) alors x_0 est un point de minimum global (resp. maximum global).*

Proof. Supposons f convexe $f'' \geq 0$. Tableau de variations (Posons $I =]a, b[$) :

x	$a \quad x_0 \quad b$
f''	$+$
f'	$- \nearrow 0 \nearrow +$
f	$\searrow \quad \nearrow$

□

Exercice : Démontrer la proposition 4.7 grâce à la proposition 4.8.

5. Semaine 5 : Optimisation libre des fonctions de deux variables

Dans ce chapitre nous voulons caractériser les extremums locaux et globaux des fonctions de deux variables. Contrairement aux fonctions d'une variables nous ne possédons pas d'outil tel que le tableau de variation pour analyser les fonctions de deux variables. Cependant les notions de points stationnaire et de convexité locale ou globale sont encore exploitables. La définition des extremums locaux et globaux pour une fonction de deux variable est commune à celle pour les fonctions d'une variable : Définition 4.1. Pour les fonctions de deux variables, Les voisinages de points $P_0 = (x_0, y_0)$ peuvent être assimilés à des disques de centre P_0 et de rayon aussi petit qu'on veut.

5.1. Condition du premier ordre

Definition 5.1. *Soit f une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$. $P_0 = (x_0, y_0)$ appartenant à l'intérieur de $\mathcal{D}$ (pas sur les bords) est appelé point stationnaire si $\overrightarrow{\nabla} f(P_0) = \overrightarrow{0}$.*

Proposition 5.2 (Condition nécessaires du premier ordre)**.** *Si f possède des dérivées partielles continues dans un voisinage d'un point $P_0 = (x_0, y_0)$ situé à l'intérieur de son domaine de définition et si P_0 est un extremum local de f alors P_0 est un point stationnaire*

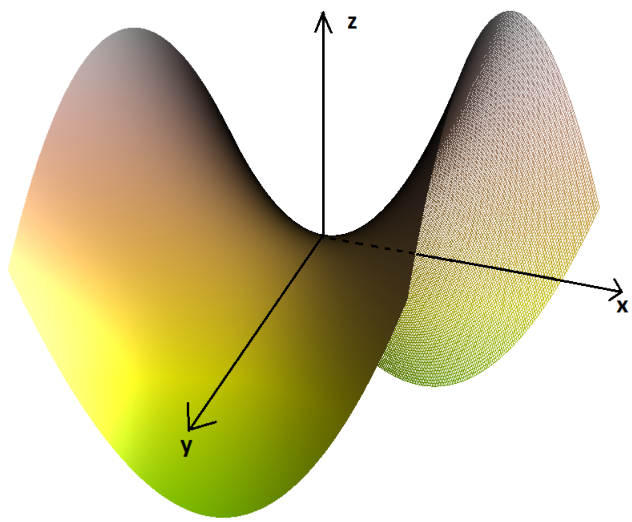


Figure 6: Représentation de $f(x, y) = x^2 - y^2$: Selle de cheval

Autrement dit les extremums locaux sont à chercher parmi les points stationnaires.

Proof. Considérons la fonction partielle $f_x(x) = f(x, y_0)$. Si (x_0, y_0) est un extremum local pour f alors x_0 est un extremum local de la fonction d'une variable f_x donc par la proposition 5.2, $f'_x(x_0) = 0$ or $f'_x(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. On prouve de la même manière que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ en considérant la fonction partielle$f_y(y) = f(x_0, y)$. □

5.2. Conditions du second ordre et convexité

Comme pour les fonctions de deux variables, une fois les points stationnaires trouvés nous aimerions savoir qui parmi ces points est un extremum local ou global.

Proposition 5.3 (Caractérisation des points stationnaires - Condition suffisante du second ordre)**.** *Soit f une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles du second ordre continues au voisinage d'un point stationnaire $P_0 = (x_0, y_0)$ situé à l'intérieur de son domaine de définition. Posons $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ et $t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.*

1. *si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 > 0$ alors P_0 est un minimum local*
2. *si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 < 0$ alors P_0 est un maximum local*

3. *si* $r_0t_0 - s_0^2 < 0$ *alors* P_0 *n'est ni un maximum ni un minimum local. (on dit que* P_0 *est un point selle ou un point col)*
4. *sinon on ne peut rien dire...*

Proof. Développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\begin{aligned} f(x_0+u, y_0+v) &= f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(u,v) \\ &\quad + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)u^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)v^2\right] \\ &\quad + (u^2+v^2)\epsilon(u,v) \end{aligned}$$

Or P_0 point stationnaire donc pour (u,v) assez petits :

$$f(x_0+u, y_0+v) - f(x_0,y_0) \approx \frac{1}{2}\left[r_0u^2 + 2s_0uv + t_0v^2\right]$$

Si l'on fixe $v \neq 0$ l'expression à droite de l'équation est un polynôme en u dont le discréminant vaut : $\Delta = 4v^2(s_0^2 - r_0t_0)$

- Si $r_0t_0 - s_0^2 > 0$ alors $\Delta < 0$ donc $f(x_0+u, y_0+v) - f(x_0,y_0)$ du signe de r_0 pour tout u et tout v. Si $r_0 > 0$, $f(x_0+u, y_0+v) > f(x_0,y_0)$ et P_0 est un minimum local. Si $r_0 < 0$, $f(x_0+u, y_0+v) < f(x_0,y_0)$ et P_0 est un maximum local
- Si $r_0t_0 - s_0^2 < 0$ alors le pôlynôme peut prendre des valeurs positives et des valeurs négatives.

□

Definition 5.4 (Convexité)**.** *Soit f une fonction de deux variables définie* ***sur une partie convexe*** $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ *et possèdant des dérivées partielles du second ordre. On dit que f est convexe si*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \geq 0 \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \geq 0\,.$$

On dit que f est concave si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 \geq 0 \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \leq 0\,.$$

Remarque 5.1 (Admise)**.** *Soit f une fonction de deux variables possèdant des dérivées partielles du second ordre. f est convexe (resp. concave) ssi*

$$f(tP + (1-t)Q) \leq tf(P) + (1-t)f(Q)$$

(resp. $f(tP + (1-t)Q) \geq tf(P) + (1-t)f(Q)$) pour tout $P, Q \in \mathcal{D}_f$ et tout $t \in [0,1]$. Cette caractérisation de la convexité est généralement prise comme définition.

Proposition 5.5 (Conditions d'existence d'extremums globaux)**.** *Si f est convexe (resp. concave) et admet un point stationnaire P_0 alors P_0 est un minimum global (resp. maximum global).*

Proof. Admise □

Remarque 5.2. *Soit f une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles du second ordre continues au voisinage d'un point stationnaire $P_0 = (x_0, y_0)$ situé à l'intérieur de son domaine de définition. Posons $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ et $t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$.*

1. *si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 > 0$ alors f est convexe au voisinage de P_0*
2. *si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 < 0$ alors f est concave au voisinage de P_0*
3. *si $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ alors P_0 n'est ni convexe ni concave au voisinage de P_0*
4. *sinon on ne peut rien dire...*

Exercice : Prouver la proposition 5.3 à l'aide de la proposition 5.5
Exercice Corrigé : Optimiser les fonctions de deux variables suivantes

- $f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy - y$ ($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$)
  1. *Recherche de points stationnaires* : résoudre

  $$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3y & = 0 \\ \\ 3x + 2y - 1 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{3}{5} \\ \\ y & = -\frac{2}{5} \end{cases} \tag{5.1}$$

     Un seul point stationnaire : $P_0 = (3/5, -2/5)$.
  2. Calcul des dérivées partielles secondes :

  $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 3$$

  3. P_0 est-il un extremum local ? $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 2$, $t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = 2$, $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = 3$

  $$r_0 t_0 - s_0^2 = -5$$

     Donc P_0 est un point selle.
  4. P_0 étant un point selle, pas besoin de vérifier si f convexe ou concave : P_0 n'est pas un extremum local donc *a fortiori* pas un extremum global
- $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 y^2 - y^2$ ($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$)

1. *Recherche de points stationnaires* : résoudre

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} & = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 2xy^2 & = 0 \\ \\ 4y^3 - 2x^2y - 2y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x,y) & = (0,0) \\ & ou \\ x^2 = \frac{1}{3} & \text{et } y^2 = \frac{2}{3} \\ & ou \\ x = 0 & \text{et } y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

sept points stationnaires : $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$, $P_2 = (-\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}})$, $P_3 = (\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$, $P_4 = (-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}})$, $P_5 = (0, \sqrt{\frac{1}{2}})$, $P_6 = (0, -\sqrt{\frac{1}{2}})$

2. Calcul des dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 12x^2 - 2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 12y^2 - 2x^2 - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -4xy$$

3. Critère du second ordre (local) pour chaque point critique

Pour $\mathbf{P_0}$ $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 0$, $t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = -2$, $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = 0$

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 0$$

Donc on ne peut rien dire pour P_0

Pour $\mathbf{P_1}$ $r_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_1) = \frac{8}{3}$, $t_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_1) = \frac{16}{3}$, $s_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_1) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$r_1 t_1 - s_1^2 = \frac{32}{3} > 0 \text{ et } r_1 > 0$$

Donc P_1 est un minimum local.

Pour $\mathbf{P_2}$ $r_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_2) = \frac{8}{3}$, $t_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_2) = \frac{16}{3}$, $s_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_2) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$r_2 t_2 - s_2^2 = \frac{32}{3} > 0 \text{ et } r_2 > 0$$

Donc P_2 est un minimum local.

Pour $\mathbf{P_3}$ $r_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_3) = \frac{8}{3}$, $t_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_3) = \frac{16}{3}$, $s_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_3) = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$r_3 t_3 - s_3^2 = \frac{32}{3} > 0 \text{ et } r_3 > 0$$

Donc P_3 est un minimum local.

Pour $\mathbf{P_4}$ $r_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_4) = \frac{8}{3}$, $t_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_4) = \frac{16}{3}$, $s_4 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_4) = -\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$$r_4 t_4 - s_4^2 = \frac{32}{3} > 0 \text{ et } r_4 > 0$$

Donc P_4 est un minimum local.

Pour $\mathbf{P_5}$ $r_5 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_5) = -1$, $t_5 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_5) = 4$, $s_5 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_5) = 0$

$$r_5 t_5 - s_5^2 = -4 < 0$$

Donc P_5 point selle.

Pour $\mathbf{P_6}$ $r_6 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_6) = -1$, $t_6 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_6) = 4$, $s_6 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_6) = 0$

$$r_6 t_6 - s_6^2 = -4 < 0$$

Donc P_6 point selle.

4. P_5 et P_6 étant des points selle, f ne peut être ni convexe ni concave (pas besoin de vérifier).

- $f(x, y) = x^2 + y^2$ ($\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$)

1. *Recherche de points stationnaires* : résoudre

$$\left\{\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 2x & = 0 \\ 2y & = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x & = 0 \\ y & = 0 \end{array}\right. \tag{5.2}$$

Un seul point stationnaire : $P_0 = (0, 0)$.

2. Calcul des dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

3. P_0 est-il un extremum local ? $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 2$, $t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = 2$, $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = 0$

$$r_0 t_0 - s_0^2 = 4 \text{ et } r_0 > 0$$

Donc P_0 est un minimum local.

4. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right)^2 = 2 \geq 0 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) \geq 0$$

donc f est convexe et P_0 est un minimum global.

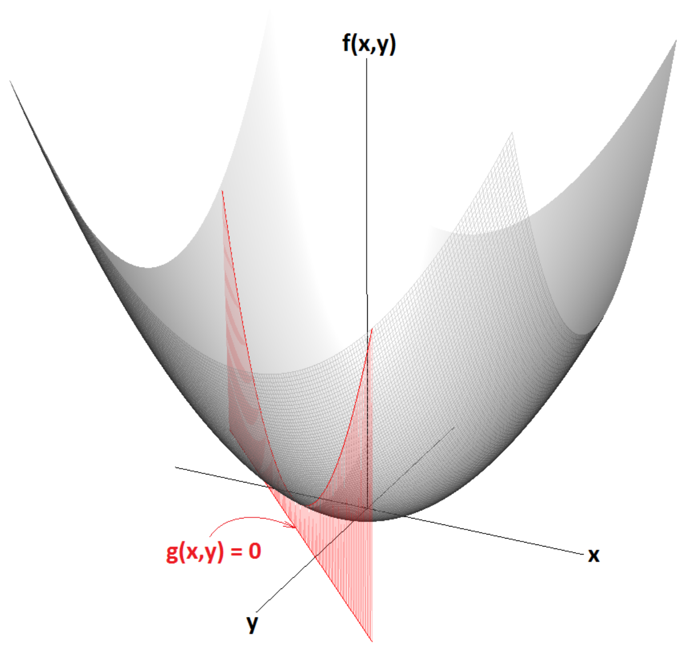


Figure 7: Représentation de $f(x,y) = x^2 + y^2$ et de la contrainte $g(x,y) = y - x - \frac{1}{2} = 0$

6. Semaine 6 : Optimisation sous contrainte d'égalité : la méthode du Lagrangien

Nous avons vu dans le chapitre 4.2 la méthode de substitution permettant d'optimiser une fonction de deux variables $f(x,y)$ sous une contrainte du type : $y = g(x)$ ou $x = g(y)$ c'est dire lorsque la contrainte permet d'exprimer une variable en fonction d'une autre. La méthode du Lagrangien décrite dans ce chapitre est plus générale : elle permet de traiter le cas où la contrainte s'écrit : $g(x,y) = 0$. Par exemple trouver :

$$\min \{f(x,y) \mid g(x,y) = 0\} \ .$$

6.1. Condition nécessaire du premier ordre

Definition 6.1 (Extremum local sous contrainte). *Soient f et g deux fonctions de deux variables soit $P_0 = (x_0, y_0)$ un point appartenant à $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$ vérifiant $g(x_0,y_0) = 0$. P_0 est un maximum local (resp. minimum local) de f sur $D = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$ s'il existe un*

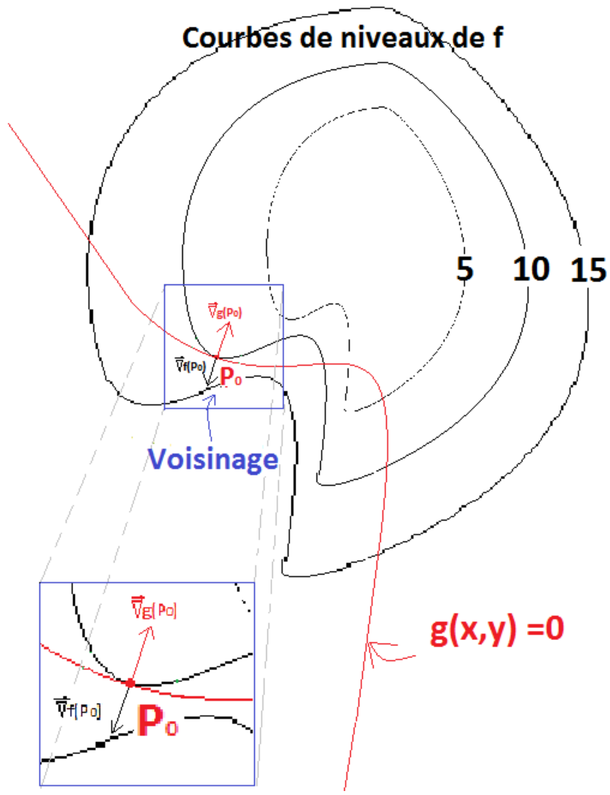


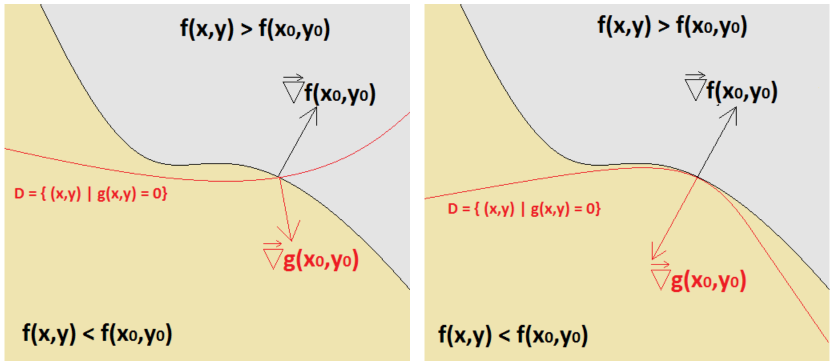
Figure 8: P_0 est un minimum local de f sous la contrainte $g(x, y) = 0$

voisinage V de P_0 tel que pour tout (x, y) de V vérifiant $g(x, y) = 0$, $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$).

Theorem 6.2 (Condition nécessaires du premier ordre)**.** *Soient f et g deux fonctions possédant des dérivées partielles. Soit $P_0 = (x_0, y_0)$ un point intérieur à $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_g$. Si P_0 est un point d'extremum local de f sur $D = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ et que $\overrightarrow{\nabla} g(x_0, y_0) \neq 0$ alors $\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0)$ et $\overrightarrow{\nabla} g(x_0, y_0)$ sont alignés. C'est à dire : il existe un scalaire $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\overrightarrow{\nabla} f(x_0, y_0) = \lambda_0 \overrightarrow{\nabla} g(x_0, y_0) .$$

*P_0 est appelé un **point stationnaire** de f sur D et λ_0 est appelé **multiplicateur de Lagrange** associé.*



(a) Si les gradients ne sont pas alignés P_0 ne peut être un extremum local sur D

(b) Si P_0 est un extremum local sur D alors les gradients sont nécessairement alignés

Figure 9: Preuve graphique du théorème 6.2

Proof. Démontrons le dans le cas où $g(x, y) = y + ax$. Ainsi $\vec{\nabla} g(x_0, y_0) = (a, 1)$ et $g(x, y) = 0$ ssi $y = -ax$. x_0 est un minimum local de la fonction d'une variable $\widetilde{f}(x) = f(x, -ax)$. Écrivons le développement de Taylor de f pour les points sur la contrainte :

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x) = f(x, -ax) &\approx f(x_0, y_0) + \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, -a(x - x_0)) \\ &\approx f(x_0, y_0) + (x - x_0)\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot (1, -a) \ ,\end{aligned}$$

Donc $0 = \widetilde{f}'(x_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0) \cdot (1, -a)$ et $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ est orthogonal au vecteur $(1, -a)$. Or $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ est aussi orthogonal $(1, -a)$ donc $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$ et $\vec{\nabla} g(x_0, y_0)$ sont alignés. $\square$

La figure 9 est une démonstration "graphique" du Théorème 6.2.

Ce théorème nous permet de mettre en place la méthode dite du Lagrangien pour trouver les points stationnaires du problème d'optimisation sous contrainte, candidats pour être des extrémums locaux (ou globaux) sous contrainte. Définissons la fonction de trois variables :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \ ,$$

Proposition 6.3 (Méthode du Lagrangien)**.** *$P_0 = (x_0, y_0)$ est un point stationnaire sur $D = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ associé au multiplicateur de Lagrange λ_0 ssi (x_0, y_0, λ_0)*

est solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) &= 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{cases}$$

Cette proposition est une conséquence directe du Théorème 6.2

6.2. Caractérisation faible des extremums locaux sous contrainte - Condition suffisante du second ordre

Proposition 6.4 (Caractérisation **faible** des points stationnaires sous contrainte - Condition suffisante du second ordre)**.** *Soit f et g deux fonctions de deux variables possédant des dérivées partielles du second ordre continues au voisinage d'un point stationnaire $P_0 = (x_0, y_0)$ sous la contrainte $D = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$ associé au multiplicateur de Lagrange λ_0. Posons la fonction de **deux** variables $\mathcal{L}_0(x,y) = f(x,y) - \lambda_0 g(x,y)$.*

1. *si P_0 est un minimum local libre de $\mathcal{L}_0$ alors P_0 est un minimum local sur D de la fonction f*
2. *si P_0 est un maximum local libre de $\mathcal{L}_0$ alors P_0 est un maximum local sur D de la fonction f*
3. *sinon on ne peut rien dire...*

Proof. Supposons que $P_0 = (x_0, y_0)$ soit un maximum local libre de $\mathcal{L}_0$ (Démonstration analogue si P_0 minimum local). Il existe donc un voisinage V de (x_0, y_0) tel que : pour tout $(x,y) \in V$, $\mathcal{L}_0(x,y) \leq \mathcal{L}_0(x_0,y_0)$ (c'est la définition de maximum local pour $\mathcal{L}_0$). Remarquons le point suivant : pour tout point (x,y) sur la contrainte, et n'importe quel $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = f(x,y)$$

Considérons maintenant un point (x,y) appartenant V et vérifiant la contrainte $g(x,y) = 0$. Notre objectif est de montrer que $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$. Par la remarque précédente,

$$\mathcal{L}_0(x,y) = \mathcal{L}(x,y,\lambda_0) = f(x,y)$$

et comme (x_0, y_0) est sur la contrainte,

$$\mathcal{L}_0(x_0,y_0) = \mathcal{L}(x_0,y_0,\lambda_0) = f(x_0,y_0)$$

or $\mathcal{L}_0(x,y) \leq \mathcal{L}_0(x_0,y_0)$, donc $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$.

La figure 10 est une "démonstration graphique" de la proposition 6.4. □

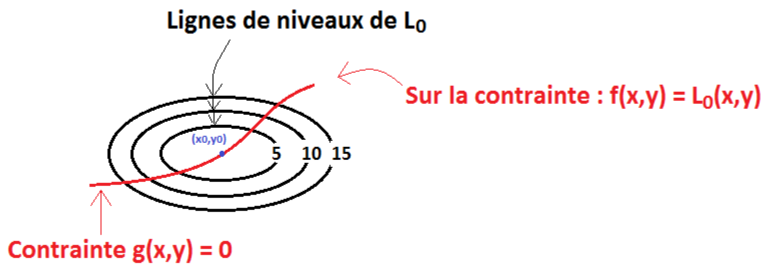


Figure 10: Démonstration graphique de la proposition 6.4. (x_0, y_0) minimum local de $\mathcal{L}_0$ et donc aussi minimum locale de f sous contrainte

6.3. Extremums globaux sous contrainte d'égalité

Dans cette section sont regroupées quelques résultats permettant de conclure à l'existence d'extremums globaux sous contrainte.

Proposition 6.5 (Condition suffisante d'extremums globaux pour les contraintes affines)**.** *Si g est une fonction affine : $g(x, y) = ax + by + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$, si f est une fonction convexe (resp. concave) et si P_0 est un point stationnaire de f sur $D = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ alors P_0 est un point de minimum global (resp. maximum global) de f sur D.*

Theorem 6.6 (Weierstrass)**.** *Toute fonction f continue sur un ensemble K borné et fermé (qui contient ses bords) possède un maximum global et un minimum global*

Exemple : Le cercle $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\right\}$ est fermé et borné. Donc toute fonction f définie et continue sur un domaine contenant le cercle possède un maximum et un minimum global sur D.

Le théorème de Weierstrass permet d'affirmer lorsque f est continue et que D est fermé et borné que parmi les points stationnaires sur D se trouvent au moins un minimum et un maximum global sur D.

Proposition 6.7 (Condition suffisante sur le Lagrangien pour qu'un point stationnaire soit un extremum global.)**.** *Soit f et g deux fonctions de deux variables possédant des dérivées partielles du second ordre. Considérons la contrainte $D = \{(x, y) \mid g(x, y) = 0\}$ et $P_0 = (x_0, y_0)$ un point stationnaire sous contrainte associé au multiplicateur de Lagrange λ_0. Posons la fonction de* ***deux*** *variables $\mathcal{L}_0(x, y) = f(x, y) - \lambda_0 g(x, y)$. Dans le cas où $\mathcal{L}_0$ est définie sur une partie convexe $\mathcal{D}_0$ de $\mathbb{R}^2$:*

1. *si P_0 est un minimum global libre de $\mathcal{L}_0$ sur $\mathcal{D}_0$ (Si $\mathcal{L}_0$ convexe) alors P_0 est un minimum global sur D de la fonction f*
2. *si P_0 est un maximum global libre de $\mathcal{L}_0$ sur $\mathcal{D}_0$ (Si $\mathcal{L}_0$ concave) alors P_0 est un maximum global sur D de la fonction f*

Proof. La démonstration est analogue à celle de la proposition 6.4 : il suffit de se placer sur $\mathcal{D}_0$ tout entier au lieu de considérer un voisinage V de P_0. $\square$

Remarque 6.1. *La proposition 6.5 est un corollaire de la proposition 6.7. Si $g(x,y) = ax + by + c$ alors g est convexe **et** concave. Si f est convexe (resp. concave) et si (x_0, y_0) point stationnaire sous contrainte associé à λ_0, alors $\mathcal{L}_0 = f(x,y) - \lambda_0 g(x,y)$ est la somme de deux fonctions convexe (resp. concave) donc $\mathcal{L}_0$ est convexe (resp. concave).*

6.4. Exemples

- Optimiser la fonction $f(x,y) = xy$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$. ($g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$))
  1. Domaines de définitions : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^2$
  2. Lagrangien : $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$
  $$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - 2\lambda x & = 0 \\ x - 2\lambda y & = 0 \\ x^2 + y^2 & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = +/- \frac{1}{2} \\ y & = 2\lambda x \\ x^2 & = y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.1)$$
     Finalement les quatre points stationnaires sur D sont :
     - $(x_1, y_1) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ associé au multiplicateur $\lambda_1 = \frac{1}{2}$.
     - $(x_2, y_2) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ associé au multiplicateur $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.
     - $(x_3, y_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ associé au multiplicateur $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$.
     - $(x_4, y_4) = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ associé au multiplicateur $\lambda_4 = -\frac{1}{2}$.
  3. Par le Théorème de Weierstrass, f possède parmi ces points stationnaires au moins un point de minimum global sur D et un point de maximum global. Il suffit d'évaluer f en ces points stationnaires :
  $$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \frac{1}{2}\ ,\ f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = -\frac{1}{2}$$
     f possède donc deux point de maximums globaux sur D : (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et deux point de minimums globaux sur D : (x_3, y_3) et (x_3, y_3)
- Optimiser la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$. ($g(x,y) = xy - 1$))
  1. Domaines de définitions : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}^2$
  2. Lagrangien : $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 1)$
  $$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x,y,\lambda) & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x,y,\lambda) & = 0 \\ xy & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda y & = 0 \\ 2y - \lambda x & = 0 \\ xy & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 & = 1 \\ y & = 1/x \\ \lambda & = 2 \end{cases}$$

Finalement les deux points stationnaires sur D sont :

- $(x_1, y_1) = (1, 1)$ associé au multiplicateur $\lambda_1 = 2$.
- $(x_2, y_2) = (-1, -1)$ associé au multiplicateur $\lambda_2 = 2$.

3. On ne peut pas appliquer le théorème de Weierstrass car $D = \{(x, y) \mid xy = 1\}$ n'est pas borné.
4. $g(x, y) = xy - 1$ n'est pas linéaire...
5. Voyons si on peut exploiter les conditions suffisantes du second ordre : posons $\mathcal{L}_0(x, y) = f(x, y) - 2g(x, y)$

$$\mathcal{L}_0(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2$$

$r(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2$; $s(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2$; $t(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$; en appliquant s, t et r à chaque point stationnaire sur D on trouve à chaque fois : $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ ... On ne peut pas conclure dommage ... sur la figure 11 on voit bien que nos deux points stationnaires sont des minimums sous contrainte....

6. On peut cependant appliquer le critère global. $\mathcal{L}_0$ est défini sur $\mathbb{R}^2$ qui est convexe et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$r(x, y)t(x, y) - s(x, y)^2 = 0 \geq 0 \text{ et } r(x, y) = 2 \geq 0 \; ,$$

$\mathcal{L}_0$ est donc convexe, donc, par la proposition 5.5, les deux points stationnaires sont des minimums globaux libres de $\mathcal{L}_0$ et, par la proposition 6.7, sont donc des minimums globaux sous contrainte de f.

7. Semaine 7 : Méthode du Lagrangien : La bonne condition suffisante du second ordre

Dans ce chapitre nous revenons sur la condition suffisante faible du second ordre donnée par la proposition 6.4 (*Caractérisation **faible** des points stationnaires sous contrainte - Condition suffisante du second ordre*). Cette condition, bien que permettant de déterminer la nature des points stationnaires sous contraintes dans certains cas, ne permet pas de conclure très souvent. Nous pouvons faire mieux. Regardons en détail cette proposition et sa démonstration. Si (x_0, y_0, λ_0) est solution du Lagrangien et si l'on souhaite utiliser la proposition 6.4, on va tenter d'optimiser la fonction de deux variables $\mathcal{L}_0(x, y) = \mathcal{L}(x, y, \lambda_0)$. Pour cela on regarde le signe des quantités $r_0 t_0 - s_0^2$ et r_0 avec

$$r_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^2}(x_0, y_0) \; , \; s_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \; , \; t_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial y^2}(x_0, y_0) \; ,$$

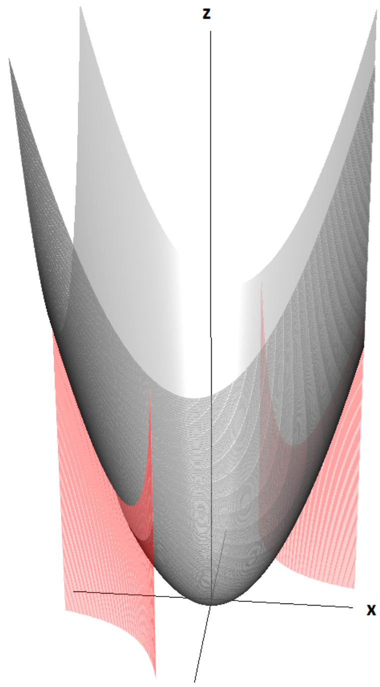


Figure 11: Représentation de $f(x, y) = x^2 + y^2$ et de la contrainte $g(x, y) = xy - 1 = 0$

avec comme objectif d'appliquer la proposition 5.3 (*condition suffisante du second ordre en optimisation libre*) à la fonction $\mathcal{L}_0$ et au point stationnaire (x_0, y_0). La démonstration de la propostion 5.3 repose sur le développement de Taylor de $\mathcal{L}_0$. (x_0, y_0) étant un point stationnaire : $\overrightarrow{\nabla}\mathcal{L}_0(x_0, y_0) = \overrightarrow{0}$ et

$$\mathcal{L}_0(x_0 + h, y_0 + h) \approx \mathcal{L}_0(x_0, y_0) + \frac{1}{2}\left[r_0 h^2 + 2s_0 hk + t_0 k^2\right] \tag{7.1}$$

Donnons un nom à la fonction de deux variables de droite :

$$Q(h, k) = r_0 h^2 + 2s_0 hk + t_0 k^2$$

La démonstration de la proposition 5.3 dit que

- si $Q(h, k) > 0$ pour tout $\overrightarrow{(h, k)} \neq \overrightarrow{0}$ **(c'est le cas si** $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ **et** $r_0 > 0$**)** alors
  $$\mathcal{L}_0(x_0 + h, y_0 + h) \geq \mathcal{L}_0(x_0, y_0)$$
  et (x_0, y_0) minimum local

- si $Q(h,k) < 0$ pour tout $\overrightarrow{(h,k)} \neq \overrightarrow{0}$ **(c'est le cas si $r_0t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 < 0$)** alors
$$\mathcal{L}_0(x_0 + h, y_0 + h) \leq \mathcal{L}_0(x_0, y_0)$$
et (x_0, y_0) maximum local
- si $Q(h,k)$ change de signe **(c'est le cas si $r_0t_0 - s_0^2 < 0$)** alors (x_0, y_0) Point selle local

Sous contrainte (Proposition 6.4), nous appliquons ce résultats aux points $(x,y) = (x_0 + h, y_0 + k)$ se baladant sur la contrainte. Or, si (x,y) est sur la contrainte, alors $g(x,y) = g(x_0,y_0) = 0$ donc $\mathcal{L}_0(x,y) = f(x,y) - \lambda_0 g(x,y) = f(x,y)$. Ainsi, si (x_0,y_0) extremum local libre de $\mathcal{L}_0$ alors (x_0,y_0) extremum local sous contrainte de f. La figure 12 illustre cette démonstration.

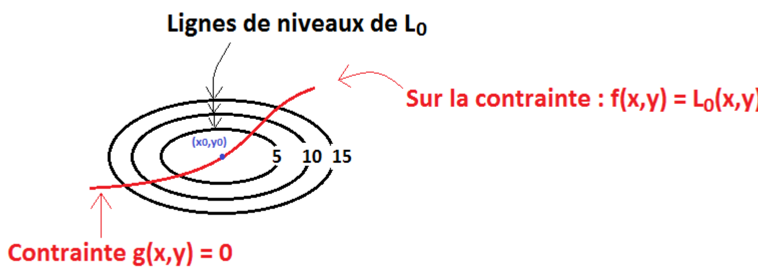


Figure 12: Représentation de $\mathcal{L}_0$ dans le cas où (x_0,y_0) minimum local de $\mathcal{L}_0$ et donc aussi minimum locale de f sous contrainte

Cependant, il n'est pas nécessaire que (x_0,y_0) soit un extremum local pour $\mathcal{L}_0$ pour que (x_0,y_0) soit un extremum sous contrainte pour f ! Il suffit de regarder $\mathcal{L}_0(x_0+h, y_0+k)$ uniquement dans la direction imposée par la contrainte : ce qui nous intéresse c'est d'appliquer $\mathcal{L}_0$ aux points $(x,y) = (x_0+h, y_0+k)$ se trouvant sur la contrainte. La figure 13 illustre ceci. Sur cette figure (x_0,y_0) est un point selle libre pour $\mathcal{L}_0$ pourtant, lorsque l'on regarde $\mathcal{L}_0$ (et donc f) sur la contrainte, on voit que (x_0,y_0) est un minimum local.

Autrement dit, il suffit de regarder le signe de la fonction $Q(h,k)$ uniquement pour les déplacements $\overrightarrow{(h,k)}$ dans la direction de la contrainte : c'est à dire: lorsque (x_0+h, y_0+k) appartient à la tangente à la courbe d'équation $g(x,y) = 0$.

Quelle condition sur h, k permet d'obtenir un déplacement $\overrightarrow{(h,k)}$ aligné avec la tangente? Il faut et il suffit que $\overrightarrow{(h,k)}$ soit orthogonal au gradient de g au point (x_0,y_0), c'est à dire lorsque :
$$\overrightarrow{(h,k)} \cdot \overrightarrow{\nabla} g(x_0,y_0) = 0$$

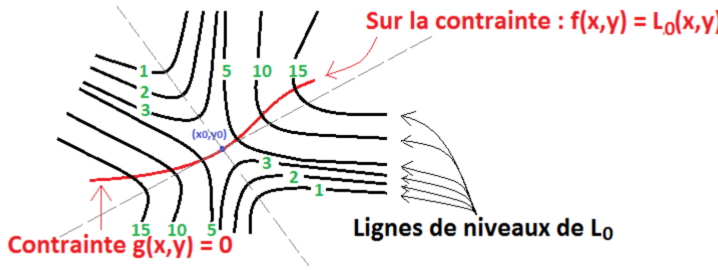


Figure 13: Représentation de $\mathcal{L}_0$ dans le cas où (x_0, y_0) point selle de $\mathcal{L}_0$ et pourtant (x_0, y_0) minimum local de f sur la contrainte

où on rappelle que :

$$\overrightarrow{(h,k)} \cdot \vec{\nabla} g(x_0, y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)k$$

.

Dans la suite nous noterons pour simplifier :

$$a = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \text{ et } b = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) .$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{(h,k)} \cdot \vec{\nabla} g(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow ah + bk = 0$$

Nous sommes prêts à énoncer une nouvelle condition suffisantes du second ordre pour l'optimisation sous contrainte. Rappelons d'abord les notations :

- $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$
- Soit (x_0, y_0, λ_0) un point stationnaire du Lagrangien :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x_0, y_0, \lambda_0) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$$

- Posons $\mathcal{L}_0(x, y) = f(x, y) - \lambda_0 g(x, y)$ et

$$r_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^2}(x_0, y_0) \ , \ s_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \ , \ t_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial y^2}(x_0, y_0) \ ,$$

- posons $Q(h, k)$ la fonction intervenant dans le développement limité du second ordre (*c.f. Equation* 7.1):

$$Q(h, k) = r_0 h^2 + 2s_0 hk + t_0 k^2$$

- Finalement Posons

$$a = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \text{ et } b = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \ .$$

Proposition 7.1 (Caractérisation **forte** des points stationnaires sous contrainte - Condition suffisante du second ordre)**.** .

Si pour tout $\overrightarrow{(h,k)} \neq \overrightarrow{0}$ *vérifiant* $ah + bk = 0$ *:*

- $Q(h,k) > 0$*, alors* (x_0, y_0) *est un minimum local sous contrainte pour* f*,*
- $Q(h,k) < 0$*, alors* (x_0, y_0) *est un maximum local sous contrainte pour* f*,*
- $Q(h,k) = 0$*, alors on ne peut rien dire.*

Méthodologie

1. Recherche des points stationnaires du Lagrangien $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

Pour chaque point stationnaire (x_0, y_0, λ_0) **:**

2. poser $\mathcal{L}_0(x, y) = f(x, y) - \lambda_0 g(x, y)$ et calculer :

$$r_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x^2}(x_0, y_0) \ , \ s_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \ , \ t_0 = \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial y^2}(x_0, y_0) \ ,$$

3. Si $r_0 t_0 - s_0^2 > 0$ Appliquer la CS **faible** du second ordre
4. Sinon : poser $a = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0), \text{ et } b = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$.
5. Appliquer la CS **forte** du second ordre.

Applications :

- Revenons à l'exemple qui ne marchait pas de l'exercice précédent et voyons si cette nouvelle condition suffisante du second ordre permet de conclure : $f(x, y) = x^2 + y^2$ et $g(x, y) = xy - 1$.
  1. Le lagrangien est : $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 1)$ et nous avions trouvé deux points stationnaires de ce Lagrangien : $(x_1, y_1, \lambda_1) = (1, 1, 2)$ et $(x_2, y_2, \lambda_2) = (-1, -1, 2)$.
  2. les deux multiplicateurs de Lagrange λ sont égaux à 2. Regardons donc

  $$\mathcal{L}_0(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy + 2$$

     Nous avions calculé $r_0 = 2$, $s_0 = -2$ et $t_0 = 2$ Comme $r_0 t_0 - s_0^2 = 0$ La proposition 6.4 ne nous permetait pas de déterminer la nature des deux points stationnaires sous contrainte. Pourtant il apparaît clairement sur la figure 11 que nos deux points $(1, 1)$ et $(-1, -1)$ sont des minimums sous contrainte. Voyons si nous pouvons le démontrer grâce â la proposition 7.1
  3. Regardons le signe de $Q(h, k) = 2h^2 - 4hk + 2k^2$ dans les directions des tangentes la contrainte passant par nos deux points stationnaires : (Remarque : C'est le même Q pour les deux points stationnaires car ils sont associés au même multiplicateur de Lagrange.)

– **Pour** $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}) = (\mathbf{1}, \mathbf{1})$
Calculons $a_1 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_1, y_1) = 1$ et $b_1 = \frac{\partial g}{\partial y}(x_1, y_1) = 1$.
Donc

$$a_1 h + b_1 k = 0 \Leftrightarrow k = -h.$$

Pour de tels couples (h, k), par substitution, $Q(h, k) = Q(h, -h) = 2h^2 + 4h^2 + 2h^2 = 8h^2 > 0$ si $h \neq 0$. Donc Par la proposition 7.1, $(x_1, y_1) = (1, 1)$ est bien un minimum local sous contrainte pour f.

– **Pour** $(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}) = (-\mathbf{1}, -\mathbf{1})$
Calculons $a_2 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_2, y_2) = -1$ et $b_2 = \frac{\partial g}{\partial y}(x_2, y_2) = -1$.
Donc

$$a_2 h + b_2 k = 0 \Leftrightarrow k = -h.$$

Pour de tels couples (h, k), par substitution, $Q(h, k) = Q(h, -h) = 2h^2 + 4h^2 + 2h^2 = 8h^2 > 0$ si $h \neq 0$. Donc Par la proposition 7.1, $(x_2, y_2) = (-1, -1)$ est bien un minimum local sous contrainte pour f.

- Optimiser $f(x, y) = x^2 y - 3e^x$ sous la contrainte $g(x, y) = y - e^x = 0$

1. **Lagrangien** :

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 y - 3e^x - \lambda\,(y - e^x)$$

Trouvons les points stationnaires du Lagrangien : résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x, y, \lambda) & = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x, y, \lambda) & = 0 \\ y - e^x & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2xy - 3e^x + \lambda e^x & = 0 \\ x^2 - \lambda & = 0 \\ y - e^x & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -3\ ,\ y = e^{-3}\ ,\ \lambda = 9 \\ \text{ou} & \\ x & = 1\ ,\ y = e\ ,\ \lambda = 1 \end{cases}$$

On a trouvé deux points stationnaires sous contrainte :

$$(x_1, y_1) = (-3, e^{-3}) \ \text{ associé au multiplicateur } \lambda_1 = 9$$

et

$$(x_2, y_2) = (1, e) \ \text{ associé au multiplicateur } \lambda_2 = 1$$

2. **Nature des points stationnaires**

– **Pour** $(\mathbf{x_2}, \mathbf{y_2}) = (1, e)$:

a) regardons les dérivées partielles secondes de la fonction de deux variables : $\mathcal{L}_2(x, y) = f(x, y) - \lambda_2 g(x, y)$.

$$\mathcal{L}_2(x, y) = x^2 y - 3e^x - (y - e^x)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial x^2}(x, y) & = 2y - 3e^x + e^x \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial y^2}(x, y) & = 0 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial x \partial y}(x, y) & = 2x \end{cases}$$

ainsi

$$r_2 = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial x^2}(x_2, y_2) = 0\ ,\ t_2 = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_2}{\partial y^2}(x_2, y_2) = 0\ ,\ s_2 = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial x \partial y}(x_2, y_2) = 2$$

b) Regardons $r_2 t_2 - s_2^2 = -4 < 0$. On ne peut pas conclure grâce à la proposition 6.4.

c) Regardons $Q_2(h,k) = r_2 h^2 + 2 s_2 hk + t_2 k^2$ sur l'espace tangent :

$$a_2 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_2, y_2) = -e\ ,\ b_2 = \frac{\partial g}{\partial y}(x_2, y_2) = 1$$

Donc

$$a_2 h + b_2 k = 0 \Leftrightarrow k = e \cdot h$$

Pour de tels couples (h,k), par substitution, $Q_2(h,k) = Q_2(h, eh) = 4eh^2 > 0$ si $h \neq 0$. Donc, par la proposition 7.1, (x_2, y_2) est un minimum local sous contrainte pour f.

– **Pour** $(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}) = (-3, e^{-3})$:

a) regardons les dérivées partielles secondes de la fonction de deux variables : $\mathcal{L}_1(x,y) = f(x,y) - \lambda_1 g(x,y)$.

$$\mathcal{L}_1(x,y) = x^2 y - 3e^x - 9\,(y - e^x)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial x^2}(x,y) & = 2y - 3e^x + 9e^x \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial y^2}(x,y) & = 0 \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial x \partial y}(x,y) & = 2x \end{cases}$$

ainsi

$$r_1 = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial x^2}(x_1, y_1) = 8e^{-3}\ ,\ t_1 = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial y^2}(x_1, y_1) = 0\ ,\ s_1 = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_1}{\partial x \partial y}(x_1, y_1) = -6$$

b) Regardons $r_1 t_1 - s_1^2 = -36 < 0$. On ne peut pas conclure grâce à la proposition 6.4.

c) Regardons $Q_1(h,k) = r_1 h^2 + 2 s_1 hk + t_1 k^2$ sur l'espace tangent :

$$a_1 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_1, y_1) = -e^{-3}\ ,\ b_1 = \frac{\partial g}{\partial y}(x_1, y_1) = 1$$

Donc

$$a_1 h + b_1 k = 0 \Leftrightarrow k = e^{-3} h$$

Pour de tels couples (h,k), par substitution, $Q_1(h,k) = Q_1(h, e^{-3}h) = 8e^{-3}h^2 - 12e^{-3}h^2 = -4e^{-3}h^2 < 0$ si $h \neq 0$. Donc, par la proposition 7.1, (x_1, y_1) est un maximum local sous contrainte pour f.